Soluciones Hoja 6. Pedro Balodis

Problema 1. Encontrar $x \in (1, e)$ tal que $\dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c)$ con $f(x) = \ln x + 1$:

Solución. Como $\dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \dfrac{1}{e - 1}$ y $f'(x) = 1/x$, $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{e - 1} \Leftrightarrow c = e - 1 \in (1, e)$ (pues $2 < e < 3$)

Problema 2. ¿Existe alguna función f con $f(1) = 4$, $f(5) = 7$ y $f'(x) \geq 1\, \forall x$?

Solución: NO, pues entonces tendríamos $\dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{3}{4}$, con lo cual no puede existir $x \in (1, 5)$ con $3/4 = f'(x)$.

Problema 3. Probar mediante el Teorema del Valor Medio de Lagrange la desigualdad $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: Podemos suponer $a \neq b$ (de otro modo, la desigualdad es trivial). Como además $|\cos a - \cos b| = |\cos b - \cos a|$, podemos suponer de hecho $a < b$. Entonces el Teorema del Valor Medio de Lagrange afirma que $\exists c \in (a, b)$ con

$$\frac{\cos b - \cos a}{b - a} = -\operatorname{sen} c \Rightarrow \left|\frac{\cos b - \cos a}{b - a}\right| = |-\operatorname{sen} c| \leq 1$$

y por tanto, $|\cos b - \cos a| = |b - a| \left|\dfrac{\cos b - \cos a}{b - a}\right| \leq |b - a|$.

Problema 4. Probar que las siguientes ecuaciones tienen exactamente una raíz real, usando los teoremas de Bolzano y de Rolle (observemos que si $f(x) = 0$ con f diferenciable en un intervalo I dónde $f' \neq 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene a lo más una raíz, pues si tuviera más de una, entre ésas dos f' debería anularse, según el Teorema de Rolle).

a) $x^5 + 14x + 31 = 0$: Puesto que $f(x) = x^5 + 14x + 31$ cumple $f'(x) = 5x^4 + 14 \geq 14$, f' no se anula. Tenemos $f(-2) = -29 < 0 < 31 = f(0)$. Por tanto, el Teorema de Bolzano asegura que f tiene una raíz en $(-2, 0)$, que es además su única raíz por ser $f' \neq 0$.

b) $3x - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = 0$: $g(x) = x - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ cumple

$g'(x) = 3 - \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \geq 3 - \dfrac{\pi}{2} > 0$ (pues $3 < \pi < 4$), luego g' no se anula. Tenemos $g(0) - 1 < 0 < 1 = g(1)$. Por tanto, el Teorema de Bolzano asegura que g tiene una raíz en $(0, 1)$, que es además su única raíz por ser $g' \neq 0$.

Problema 5. Determinar el número exacto de soluciones de las siguientes ecuaciones (es continuación del problema anterior):

a) $2x - 1 = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow f(x) = 0$; $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$: $f'(x) = 2 - \cos x \geq 1$. Como $f(0) = -1 < 0 < 3 - \operatorname{sen} 2 = f(2)$, f tiene una raíz en $(0, 2)$, y es única por ser $f' \neq 0$.

b) $x = \arctan x \Leftrightarrow g(x) = 0$; $g(x) = x - \arctan x$: La ecuación anterior tiene la solución obvia $x = 0$. Para ver que es la única,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = -\frac{x^2}{1 + x^2} < 0,\ x \neq 0 \qquad (1)$$

De (1) se deduce que la ecuación $g(x) = 0$ no puede tener solución para $x \neq 0$ (si tuviera una solución $x' > 0$, g' se anularía en $(0, x')$, y si $x' < 0$, g' se anularía en $(x', 0)$), luego la única solución es la obvia $x = 0$.

c) $(2+x)^{1/4} - x^{1/4} = 1 \Leftrightarrow h(x) = 0$; $h(x) = (2+x)^{1/4} - x^{1/4} - 1$: Ésta ecuación sólo tiene sentido considerarla para $x \geq 0$. Tenemos

$$h'(x) = \frac{1}{4}[(2+x)^{-3/4} - x^{-3/4}],\ x > 0$$

La función $u(x) = x^{-3/4}$, $x > 0$ es estrictamente decreciente según lo visto en Teoría, y si $x > 0$, $0 < x < 2 + x \Rightarrow x^{-3/4} > (2+x)^{-3/4}$, de dónde $h'(x) < 0$, $x > 0$ y la ecuación $h(x) = 0$, $x \geq 0$ tiene a lo más una solución. Por último, $h(0) = 2^{1/4} - 1 > 0$, $h(2) = 4^{1/4} - 2^{1/4} - 1 = 2^{1/2} - 2^{1/4} - 1$

Problema 6. Sea f que tiene dos derivadas en $[a,b]$ y al menos 3 ceros en $[a,b]$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ con $f''(c) = 0$.

Solución: Sean d, e, f tres puntos distintos en $[a,b]$ dónde f se anule, y podemos suponer $a \leq d < e < f \leq b$. Aplicando el Teorema de Rolle a los intervalos $[d,e]$ y $[e,f]$, deducimos que existen $k \in (d,e)$, $h \in (e,f)$ con $f'(k) = f'(h) = 0$. Ahora aplicamos el Teorema de Rolle a f' en el intervalo $[k,h]$ (observemos que $k < h$) y deducimos finalmente que existe $c \in (k,h) \subset (a,b)$ con $f''(c) = 0$.

(Observación: Necesitamos al menos tres ceros de f para poder garantizar la conclusión, pues si consideramos $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1,1]$, f tiene dos ceros en ése intervalo [sus extremos], pero $f'' = 2$, que no se anula).

Problema 7. Calcular los siguientes límites, usando el Teorema de L'Hôpital:

a) $l = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\tan 8x} = \dfrac{0}{0}$:

Solución:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{8\sec^2 8x} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(la aplicación del Teorema de L'Hôpital es legítima, porque el límite l es $0/0$ y la derivada del cociente, $\sec^2 x$ es continua y distinta de cero en un intervalo $(-\delta, \delta)$ para cierto $\delta > 0$).

b) $l = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)} = \dfrac{0}{0}$:

Solución:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{-6\operatorname{sen} 6x/\cos 6x}{-3\operatorname{sen} 3x/\cos 3x} \\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}\ \underbrace{\frac{\cos 3x}{\cos 6x}}_{\to 1,\, x\to 0} \\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{0}{0} \\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{6\cos 6x}{3\cos 3x} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(Hemos aplicado el Teorema de L'Hôpital dos veces consecutivas).

c) $l = \lim_{x\to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0}$:

Solución:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \operatorname{sen} \pi x}{2x-2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

(Hemos aplicado el Teorema de L'Hôpital dos veces consecutivas).

d) $l = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 9}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$:

Solución:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to\infty} \frac{12x^3 - 15x^2 + 8x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{36x^2 - 30x + 8}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{72x - 30}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{72}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Hemos aplicado el Teorema de L'Hôpital cuatro veces consecutivas).

Problema 8. Calcular los siguientes límites:

a) $l = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x\cos x - 2\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{0}{0}$:

Solución:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2/(1+x)}{2x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x - x\cos x + 1/(1+x)^2}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Hemos aplicado el Teorema de L'Hôpital dos veces consecutivas).

b) $s = \lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen} x)^{1/x} = 1^\infty$:

Solución:

$$\begin{aligned} \log s &= \log\left(\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \log\left((1+\operatorname{sen} x)^{1/x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x/(1+\operatorname{sen} x)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Hemos aplicado, primero que si el límite $s > 0$, la función log es continua en s, y luego el Teorema de L'Hôpital). Pero si $\log s = 1 \Leftrightarrow s = e^1 = e > 0$, lo que *a posteriori* justifica el cálculo.

c) $r = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = 1^\infty$, $a, b > 0$:

Solución:

$$\begin{aligned}
\log r &= \log\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\log\dfrac{a^x+b^x}{2}}{x} = \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{2}a^x\log a + \dfrac{1}{2}b^x\log b\right)\Big/\dfrac{a^x+b^x}{2}}{1}\\
&= \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b\\
&= \log\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

(Hemos aplicado, primero que si el límite $s > 0$, la función log es continua en s, luego que $a^x = \exp(x\log a) \Rightarrow (a^x)' = a^x\log a$ y por último, el Teorema de L'Hôpital). Pero si $\log s = \log\sqrt{ab}$, $s = \sqrt{ab} > 0$; $a, b > 0$, lo que *a posteriori* justifica el cálculo.

Problema 9. Determinar los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en $[-2, 6]$:

Solución: Como f es continua en todo $\mathbb{R}$ y $[-2, 6]$ es un intervalo cerrado y acotado, sabemos que f alcanzará su máximo y su mínimo en tal intervalo. Además, como f es diferenciable, si alcanza el máximo o el mínimo en puntos de (a, b), ahí f' debe de anularse (el correspondiente punto será un punto crítico), pero también podría alcanzar el máximo o el mínimo en los extremos. Por tanto, lo más simple es encontrar los puntos críticos de f en (a, b), evaluar f en tales puntos, así como en los extremos, y a partir de ahí, decidir.

Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, luego $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$, ambos puntos en $(-2, 6)$, así que *a priori* los candidatos a posible máximo/mínimo son $\{-2, -1, 3, 6\}$. Tenemos

$$f(-2) = -1,\ f(-1) = -12,\ f(3) = -26,\ f(6) = 55$$

Por tanto, si m, M son respectivamente, el mínimo y el máximo de f en $[-2, 6]$ tenemos $m = -26$, que se alcanza en $x = 3$ y $M = 55$, que se alcanza en $x = 6$.

Problema 10. Si $N(t) = 1 + (3-t)^2e^{-t}$, $t \geq 0$ representa el tamaño de cierta población (en miles de individuos, y t contado en años), determinar la población máxima y la población a largo plazo.

Solución: Tenemos $N(0) = 10$, $N'(t) = e^{-t}(t-3)(5-t)$, luego

$$N' < 0 \text{ en } (0, 3), N' > 0 \text{ en } (3, 5),\ N' < 0 \text{ en } (5, \infty)$$

Por tanto $t = 3$ da un mínimo local, $t = 5$ un máximo local, $N(3) = 1$, $N(5) \approx 1,02 < N(0)$ y $\lim_{t\to\infty} N(t) = 1$, luego la población alcanza su máximo en $t = 0$ y a largo plazo (cuando $t \to \infty$), $N(t) \to 1$.

Problema 11. Probar que entre todos los rectángulos de un perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área:

Solución: Sean $b, h > 0$ la base y la altura de tal rectángulo. Entonces su perímetro $P = 2(b + h)$, y su área $A = bh$. Si fijamos P, podemos expresar A como una función de una sola variable:

$$h = \frac{P}{2} - b = \frac{P-2b}{2}, \ A = A(b) = b\frac{P-2b}{2} = \frac{b(P-2b)}{2}$$

Como $b, h > 0 \Leftrightarrow 0 < b < P/2$, se trata de maximizar $A = A(b)$, $b \in (0, P/2)$. Pero $A'(b) = \dfrac{P-4b}{2}$ y $A'(b) = 0 \Leftrightarrow b = P/4 \in (0, P/2)$. Como $b = P/4$ es el único punto crítico de $A(b)$ en $(0, P/2)$, $A(0) = A(P/2) = 0$ y $A(b) > 0$, $b \in (0, P/2)$, el punto $b = P/4$ tiene que ser forzosamente el que da el máximo (puede comprobarse fácilmente que $A''(P/4) < 0$, aunque no es necesario). Pero $b = P/4 \Rightarrow h = P/2 - P/4 = P/4 = b$, luego el área máxima se da en el cuadrado.

Problema 12. Determinar los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia de $P = (0, 2)$:

Solución: Puesto que la distancia entre dos puntos $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ del plano es $d = [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]^{1/2}$, $d(P, (x, 4-x^2))^2 = x^2 + [2-(4-x^2)]^2 = 2x^4 - 4x^2 + 4 := f(x)$. Observamos que como maximizar/minimizar una función positiva equivale a maximizar/minimizar su cuadrado (pues la función $t \mapsto t^2$ es creciente en $[0, \infty)$), maximizar/minimizar $d(P, (x, 4-x^2))$ equivale a hacerlo con f. Observamos que f, definida para $x \in \mathbb{R}$, que no es un intervalo cerrado y acotado, no podemos garantizar sin más que alcance el máximo y el mínimo (de hecho, el máximo ciertamente no lo alcanza, pues $f(x) \to \infty$, $x \to \pm\infty$). Sin embargo, como $f(x) \to \infty$, $x \to \pm\infty$ y $f(x) \geq 0$, $\forall x$, $\exists R > 0$ tal que $|x| > R \Rightarrow f(x) > \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \geq 0$, y entonces $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{f(x) : -R \leq x \leq R\}$, y éste último sí que va a ser un mínimo, por darse en un intervalo cerrado y acotado. Adicionalmente, como f es diferenciable, tal mínimo de f se alcanzará en alguno de los puntos críticos de f.

Pero $f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$. Por tanto, los puntos críticos de f son $x = 0$, $x = \pm 1$. Asimismo, $f(0) = 4$, $f(\pm 1) = 2$. Por tanto, f se minimiza en $x = \pm 1$, luego los puntos más próximos de la curva a P son $(\pm 1, 3)$.

Problema 13. Se consideran cajas de base cuadrada (largo=ancho=$x > 0$) y altura $y > 0$ (x, y en metros). Se trata de minimizar su coste con las condiciones del problema.

Solución: El coste de producción de tal caja es $C = 4 \cdot 8xy + 2 \cdot 2x^2$ (correspondientes a un coste de 8€$/m^2$ de las paredes laterales y de 2€$/m^2$ de las tapas superior e inferior). Asimismo fijamos el volumen $V = x^2 y = 0,25 = 1/4$. Usando el volumen, podemos eliminar una de las dos variables de $C = C(x, y)$ y expresar $y = \dfrac{1}{4x^2}$. Entonces,

$$C = 4(8xy + x^2) = 4\left(\frac{2}{x} + x^2\right) = f(x), \ x > 0$$

La función f cumple $f(x) > 0$, $x > 0$ y $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. De ello se deduce que existen constantes $0 < c < C < \infty$ de modo que $f(x) > \inf\{f(x) : x > 0\} > 0$ si se cumple $0 < x < c$ o $x > C$. Por tanto,

$$\inf\{f(x) : x > 0\} = \inf\{f(x) : c \leq x \leq C\}$$

y éste ínfimo será un mínimo, por darse en el intervalo cerrado y acotado $[c, C]$, y se presentará en alguno de los puntos críticos que tenga f para $x > 0$. Tenemos

$$f'(x) = 8\left(x - \frac{1}{x^2}\right); \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Como sólo ha aparecido un punto crítico y sabemos que el mínimo se alcanza, ha de alcanzarse en $x = 1$, y el coste mínimo será $f(1) = 12$ (en €) (de nuevo, evaluando $f''(1)$ puede comprobarse que $x = 1$ da un mínimo local; el razonamiento anterior hace innecesaria tal comprobación, al tiempo que asegura que tal mínimo es global).

Problema 14. Determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad de:

a) $f(x) = x + 1/x$:

Solución: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Como f es claramente impar, basta estudiarla en $(0, \infty)$, y tenemos

$$f'(x) = 1 - x^{-2},\ f''(x) = 2x^{-3},\ x \neq 0$$

Los puntos críticos de f son $x = \pm 1$, luego $x = 1$ es el único que hay en $(0, \infty)$. Puesto que $0 < x^{-2} < 1$, $0 < x < 1$ y $x^2 > 1$, $x > 1$ y $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, $f' < 0$ en $(0, 1)$ y $f' > 0$ en $(1, \infty)$, luego f es:

- Estrictamente decreciente en $(0, 1]$ y estrictamente creciente en $[1, \infty)$, así como estrictamente convexa en $(0, \infty)$
- Usando la simetría impar de f, deducimos que en $[-1, 0)$ es estrictamente creciente, en $(-\infty, -1]$ estrictamente creciente, y en $(-\infty, 0)$ estrictamente cóncava.

b) $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$:

Solución:

$$g'(x) = 3x^2+4x+1,\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = -\frac{1}{2},\ g''(x) = 6x+4,\ g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Tenemos $g' > 0$ en $(-\infty, -5/2)$, $g' < 0$ en $(-5/2, -1/2)$, $g' > 0$ en $(-1/2, \infty)$; $g'' < 0$ en $(-\infty, -2/3)$, $g'' > 0$ en $(-2/3, \infty)$, luego:

- g es creciente estrictamente en $(-\infty, -5/2]$, decreciente estrictamente en $[-5/2, -1/2]$ y creciente estrictamente en $[-1/2, \infty)$.
- g es estrictamente cóncava en $(-\infty, -2/3]$ y estrictamente convexa en $[-2/3, \infty)$.

c) $h(x) = \arctan(2x) - x$: Ésta función es impar, luego basta estudiarla en $[0, \infty)$. Aún así, ignoremos eso ahora. Tenemos:

$$h'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2} - 1 = \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2},\ g''(x) = \frac{-16x}{(1 + 4x^2)^2}$$

Los únicos puntos críticos de h son $x = \pm 1/2$ y como $1 - 4x^2 > 0$, $x \in (-1/2, 1/2)$, $1 - 4x^2 < 0$ si $x < -1/2 \vee x > 1/2$, mientras que $g'' > 0$ en $(-\infty, 0)$, $g'' < 0$ en $(0, \infty)$, tenemos

- h es estrictamente creciente en $[-1/2, 1/2]$, y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2]$ y $[1/2, \infty)$.
- h es estrictamente convexa en $(-\infty, 0]$, y estrictamente cóncava en $[0, \infty)$.

Problema 15. Determinar los elementos esenciales de las gráficas de las siguientes funciones (dominio, crecimiento, convexidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión; añado comportamiento asintótico):

a) $f(x) = e^{1/x}$:

Solución: $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f'(x) = -e^{1/x}\frac{1}{x^2} < 0, \; f''(x) = e^{1/x}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{1/x}\frac{1+2x}{x^4}$$

Por tanto f es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Asimismo $f'' > 0$ en $(0, \infty)$, mientras que si $x < 0$, $f'' < 0$ en $(-\infty, -1/2)$, $f'' > 0$ en $(-1/2, 0)$, luego en $x = -1/2$ tiene un punto de inflexión, en $(-\infty, -1/2]$ es estrictamente convexa, en $[-1/2, 0)$ es estrictamente cóncava. Además

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \; \lim_{x \to 0-} f(x) = \infty, \; \lim_{x \to 0+} f(x) = 0$$

b) $g(x) = x \ln x$:

Solución: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, \infty)$, aunque se puede extender f por continuidad a $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

y definiendo $g(0) = 0$, tal función ahora tiene dominio $[0, \infty)$ y es continua en todo su dominio. Para $x > 0$,

$$g'(x) = \ln x + 1, \; g''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

Por tanto, g es estrictamente convexa en su dominio. Tenemos $g'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$ con $g' < 0$ en $(0, e^{-1})$, $g' > 0$ en (e^{-1}, ∞), luego g es estrictamente decreciente en $[0, e^{-1}]$, estrictamente creciente en $[e^{-1}, \infty)$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

luego g no tiene asintota oblicua en $x \to \infty$.

c) $h(x) = x + 1 - x^{-1} - x^{-2}$:

Solución: $Dom(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$h'(x) = 1 + x^{-2} + 2x^{-3}, \; h''(x) = -2x^{-3} - 6x^{-4} = -2x^{-4}(3 + x), \; x \neq 0$$

Observamos que $x^3 h'(x) = x^3 + x + 2$, que es estrictamente creciente y se anula si $x = -1$. Por tanto, el único punto crítico de h es $x = -1$, con $h''(-1) = -4 < 0$, luego $x = -1$ es un máximo local de h; como h no tiene otros puntos críticos en $(-\infty, 0)$, se sigue que el máximo global de h, restringida a $(-\infty, 0)$ se da en $x = -1$, con $h(-1) = 1$. Asimismo, h será creciente en $(-\infty, -1]$, decreciente en $(-1, 0)$ y además presenta una asíntota vertical si $x \to 0-$, pues $\lim_{x \to 0-} h(x) = -\infty$. Asimismo, si $x < 0$, $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + x = 0 \Leftrightarrow x = -3$, con $h'' > 0$ en $(-\infty, -3)$, $h'' < 0$ en $(-3, 0)$, luego h es convexa en $(-\infty, -3]$, cóncava en $[-3, 0)$ y $x = -3$ es punto de inflexión. Por último, claramente $y = x + 1$ es una asíntota oblícua de h cuando $x \to \infty$.

En $(0, \infty)$ el análisis de h es más fácil, pues $h' > 0$, $h'' < 0$, luego ahí h será creciente y cóncava. También presenta asíntota vertical en $x \to 0+$, pues $\lim_{x \to 0+} h(x) = -\infty$. También $y = x + 1$ será asíntota oblicua de h cuando $x \to \infty$.

d) $u(x) = 4x + x^{7/2}$:

Solución: Puesto que el exponente $7/2 > 0$, tomaremos como $Dom(u) = [0, \infty)$, y u será continua en todo su dominio.

$$u'(x) = 4 + \frac{7}{2}x^{5/2} \geq 4,\ x \geq 0\ u''(x) = cx^{3/2} > 0,\ x \geq 0;\ c = \frac{35}{4} > 0$$

(las fórmulas anteriores, válidas en principio para $x > 0$, se extienden al caso $x = 0$ por ser $5/2, 3/2 > 0$). Por tanto u es estrictamente creciente y estrictamente convexa en su dominio $[0, \infty)$. u no tiene asíntota en $x \to \infty$, pues $\dfrac{u(x)}{x} = 4 + x^{5/2} \to \infty$, $x \to \infty$.

e) $v(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & , x \leq 0 \end{cases}$:

Solución: Puesto que las dos funciones que se han empalmado para dar v son continuas, con $\lim_{x\to 0+} e^x = 1 = \lim_{x\to 0-}(-x^2 + 2x + 1)$, la función v es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$. Asimismo, podemos calcular (para $x \neq 0$)

$$v'(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ -2x + 2 & , x < 0 \end{cases}, \quad v''(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ -2 & , x < 0 \end{cases}$$

De ello se deduce que v es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$, y como es además continua en $x = 0$, es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ (en $x = 0$, v no es derivable, y por eso no se puede razonar directamente con v' en todo $\mathbb{R}$). Del mismo modo, en $(-\infty, 0)$, $v'' < 0$, luego es estrictamente cóncava en $(-\infty, 0]$, y en $(0, \infty)$, $v'' > 0$ (y en $[0, \infty)$, v es estrictamente convexa). Por último,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{v(x)}{x} = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{x} = \infty$$

luego la función v carece de asíntotas en $x \to \pm\infty$.

f) $w(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}} = |x|e^{-|x-1|}$:

Solución: Claramente, $Dom(w) = \mathbb{R}$, y es continua en todo su dominio ($|x|$ es continua, así como $e^{|x-1|}$, y ésta última no se anula, luego su cociente es una función continua). La diferenciabilidad es más delicada: puesto que $|x|$ no es derivable en $x = 0$, no podemos esperar que w sea derivable ni en $x = 0$, ni en $x = 1$. De hecho, tenemos:

$$w(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & , x \leq 0 \\ xe^{x-1} & , 0 \leq x \leq 1 \\ xe^{1-x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

de dónde

$$w'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(-1 - x) & , x < 0 \\ e^{x-1}(1 + x) & , 0 < x < 1 \\ e^{1-x}(1 - x) & , x > 1 \end{cases}, \quad w''(x) = \begin{cases} e^{x-1}(-2 - x) & , x < 0 \\ e^{x-1}(2 + x) & , 0 < x < 1 \\ e^{1-x}(-2 + x) & , x > 1 \end{cases}$$

A partir de ésto es elemental los intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad (para completar por vosotros).

Problema 16. Determinar el comportamiento de $f(x) = x^2 e^{-x}$:

Solución: Claramente, $Dom(f) = \mathbb{R}$ y

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x) \quad f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

Es claro que $f(x) \geq 0$, $\forall x$ y $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Asimismo,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty = -\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}; \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

así que f no tiene asíntota oblícua si $x \to -\infty$, tiene una asíntota horizontal si $x \to \infty$, es decreciente estrictamente en $(-\infty, 0]$, creciente estrictamente en $[0, 1]$, y decreciente estrictamente en $[0, \infty)$. En cuanto a la convexidad, los puntos de inflexión de f son $2 \pm \sqrt{2}$, ambos positivos, con $f'' > 0$ en $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$, $f'' < 0$ en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $f'' > 0$ en $(2 + \sqrt{2}, \infty)$, a partir de lo cual se determinan sus intervalos de convexidad.

Problema 17. Usando los polinomios de Taylor centrados en $x = 16$ de grados 1 y 2, estimar el error en $\sqrt{16,2}$ y hacer lo mismo con e y $\log 0,8$.

Solución:

- Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $f(16) = 4$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $f'(16) = \frac{1}{8}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$; $f''(16) = -\frac{1}{256}$, $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Con ello, si $P_k(x) = P_a^k(f)(x)$, tenemos:

$$P_1(x) = 4 + \frac{x - 16}{8}, \quad P_2(x) = 4 + \frac{x - 16}{8} - \frac{(x - 16)^2}{512}$$

Con ello, $P_2(16,2) = 4 + \frac{0,2}{8} - \frac{0,2^2}{512} = 4,024984375$. Según la calculadora, $\sqrt{16,2} = f(16,2) = 4,0249223\ldots$. Si estimamos el error

$$R_2 = f(16,2) - P_2(16,2) = \frac{1}{3!}\frac{3}{8}\xi^{-5/2}(0,2)^3, \ \xi \in (16,\ 16,2) \quad (1)$$

y maximizando (1) para $16 \leq \xi \leq 16,2$, $0 < R_2 \leq \frac{1}{16}(16)^{-5/2}(0,2)^3 < 5 \cdot 10^{-7}$ (de hecho, según la calculadora, $R_2 \approx 5 \cdot 10^{-7}$).

- Sea ahora $f(x) = e^x$, luego $e = f(1)$. Es inmediato que sus polinomios de Taylor centrados en $x = 0$. $P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$. Si usamos $P_k(1)$ para aproximar e, obtenemos $e = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + R_k$, y podemos escribir, usando la fórmula de Lagrange del resto,

$$R_k = \frac{e^\xi}{(k+1)!}, \ \xi \in (0, 1) \quad (2)$$

Maximizando (2) para $0 \leq \xi \leq 1$, y usando que e^x es creciente, $0 < R_k \leq \frac{3}{(k+1)!}$. Así, por ejemplo, para aproximar e con 10 cifras decimales exactas, basta tomar $k = 13$ (de hecho, $\frac{3}{14!} \approx 3 \cdot 10^{-11}$).

- Considerando ahora $f(x) = \log(1 + x)$, podemos escribir $\log 0,8 = f(-0,2)$. Ya sabemos que para ésta función, $P_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, luego usando P_2, tenemos

$$\log 0,8 = P_2(-0,2) + R_2 = -0,22 + R_2$$

con R_2, dado por la fórmula de Lagrange como

$$|R_2| = \frac{1}{3}(1+\xi)^{-3}(0,2)^3,\ \xi \in (0,8,\ 1) \quad (3)$$

Maximizando (3), obtenemos $|R_2| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{0,2}{1-0,2}\right)^3 \approx 5 \cdot 10^{-3}$.

Problema 18. Calcular $P_3 = P_0^3(f)$ para:

a) $f(x) = \log(1 + \operatorname{sen} x)$:

Solución: Tenemos

$$f(0) = 0;\ f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x},\ f'(0) = 1;\ f''(x) = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen} x},\ f''(0) = -1;\ f^{(3)}(0) = 1$$

luego $P_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} = (1+e^x)^{-1}$:

Solución: Tenemos

$$f(0) = \frac{1}{2};\ f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2},\ f'(0) = -\frac{1}{2};\ f''(x) = (1+e^x)^{-3}[2e^{2x} - e^x],\ f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = (1+e^x)^{-4}[3e^{3x} - 3e^x - (2e^{3x} - e^x)(1+e^x)],\ f^{(3)}(0) = -\frac{1}{8}$$

luego $P_3(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{48}$.

c) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$:

Solución: Tenemos

$$f(0) = 0;\ f'(x) = \cos\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{1}{(1+x)^2},\ f'(0) = 1;\ f''(x) = -f(x) - 2\frac{f'(x)}{(1+x)^3},\ f''(0) = -2$$

$$f^{(3)}(x) = -f'(x) - 2\frac{f''(x)}{(1+x)^3} + 6\frac{f'(x)}{(1+x)^4},\ f^{(3)}(0) = 9$$

luego $P_3(x) = x - x^2 + \dfrac{3}{2}x^3$.

Problema 19. Hallar la serie de Taylor centrada en $a = 0$ de $f(x) = (x^2 - 3x)e^{x^4}$ y usarla para hallar $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$:

Solución: En lugar de ponerse como locos a derivar, lo que hay que hacer es usar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Con ello,

$$\begin{aligned} xe^{x^4} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{n!}\ \forall x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x^2e^{x^4} &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{n!}\ \forall x \end{aligned}$$

de dónde, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 - 3x)e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2} - 3(x^{4n+1})}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k;\ c_k = \begin{cases} 1/n! & , k = 4n+2 \\ -3/n! & , k = 4n+1 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces, se debe cumplir $c_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$, $\forall k$ (pues sabemos *a priori* que f tiene derivadas de todos los órdenes, y si la anterior serie coincide con f, sus coeficientes c_k tienen que casar con las derivadas de f), luego

$k = 5 = 4{\cdot}1{+}1 \Rightarrow f^{(5)}(0) = (-3)5!1! = -360$; $k = 10 = 4{\cdot}2{+}2 \Rightarrow f^{(10)}(0) = 10!2! = 7.257.600$

Problema 20. Hallar las series de Taylor en $a = 0$ de las siguientes funciones, determinando dónde convergen:

a) $f(x) = x\log(1 + x^2)$:

Solución: Sabemos que $\log(1 + t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$, $-1 < t \leq 1$. Si $|x| \leq 1$, tenemos $0 \leq x^2 \leq 1$, y usando lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} x\log(1+x^2) &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n+1},\ |x| \leq 1 \end{aligned}$$

b) $g(x) = x^2 \cos x^3$:

Solución: Sabemos que $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)|} t^{2n}$, $\forall t$, y usando lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} x^2 \cos x^3 &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)|} x^{6n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n+2},\ \forall x \end{aligned}$$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$:

Solución: Sabemos que $\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)|} t^{2n-1}$, $\forall t$, y usando lo anterior, podemos escribir, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)|} x^{2n-2} \cdot x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)|} x^{2n-2};\ n - 1 = m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)|} x^{2m} \end{aligned}$$

Puesto que la anterior serie, evaluada en $x = 0$ da $1 = h(0)$, tenemos que la serie anterior en realidad es válida $\forall x$.